Topología I
Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas[1].

Grupo Único.

Profesor Miguel Ortega Titos.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 14 de enero de 2022.

Duración 3 horas.

Observaciones Todos los apartados de un mismo ejercicio tienen la misma puntuación.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (4.5 puntos)**.** Para todo $R \geqslant 0$, consideramos el conjunto S_R dado por $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = R\}$, donde $\| \cdot \|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Se considera la topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B} = \{S_R \mid R \geqslant 0\}$.

1. Estudiar cuándo el conjunto $\{x_0\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

   - Veamos en primer lugar que $\{0\} \in C_{\mathcal{T}}$. Tenemos que:

     $$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \bigcup_{R>0} S_R \in \mathcal{T}$$

     donde afirmamos que es un abierto por ser unión de abiertos. Por tanto, $\{0\}$ es cerrado.
   - Veamos ahora que si $x_0 \neq 0$, entonces $\{x_0\}$ no es cerrado. Sea $R_0 = \|x_0\|$, y sea $x \in S_{R_0}$, $x \neq x_0$. Supongamos entonces que $\mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\}$ es abierto. Entonces, como $x \neq x_0$, existe $R > 0$ tal que $x \in S_R \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\}$. Por tanto, como $x \in S_{R_0}$, tenemos que $x \in S_{R_0} \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\}$, algo que es una contradicción, ya que $x_0 \in S_{R_0}$ y $x_0 \notin \mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\}$.

2. Demostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es 1AN pero no es 2AN.

   - Veamos en primer lugar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es 1AN. Sea $x \in \mathbb{R}^2$, y veamos que existe una base de entornos β_x numerable. Sea $R_0 = \|x\|$, y como tenemos que $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base de entornos, tenemos que:

     $$\beta_x = \{S_R \mid x \in S_R\} = \{S_R \mid \|x\| = R\} = \{S_{R_0}\}$$

     Por tanto, dicha base de entornos no solo es numerable sino finita, con un único elemento.
   - Veamos que no es 2AN. Sabemos que:

     $$B(0,1) = \bigcup \{S_R \mid \|(0,x)\| = R,\ x \in [0,1[\}$$

     Supongamos que sí es 2AN, y llegaremos a una contradicción. Como es 2AN, entonces podemos extraer una base numerable de $\mathcal{B}$, que denotaremos por $\mathcal{B}' = \{S_{R_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $B(0,1)$ es abierto, entonces

     $$B(0,1) = \bigcup \{S_R \mid \|(0,x)\| = R,\ x \in A,\ A \text{ numerable.}\}$$

     Como $[0,1[$ no es numerable, entonces $A \subsetneq [0,1[$. Por tanto, como tenemos que $A \neq [0,1[$, existe $x_0 \in [0,1[\setminus A$, por lo que $S_{\|x_0\|} \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)$, lo que es una contradicción, ya que $S_{\|x_0\|} \subset B(0,1)$ por tener $\|x_0\| < 1$.

3. Calcular la clausura, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ del conjunto A dado por $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |b| \leqslant 1\}$.

   - Veamos en primer lugar que $A^\circ = \overline{B}(0,1)$.

$\subset$) Si $x \in A^\circ$, entonces existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in B \subset A$. Como $\mathcal{B}$ da una partición de $\mathbb{R}^2$, entonces $B = S_{R_0}$, con $R_0 = \|x\|$. Por tanto, $S_{R_0} \subset A$, y como S_{R_0} es cerrado, tenemos que $S_{R_0} \subset A$. Como $(0, R_0) \in S_{R_0}$, tenemos que $(0, R_0) \in A$, por lo que $R_0 \leqslant 1$. Por tanto, como $\|x\| \leqslant 1$, $x \in \overline{B}(0,1)$.

$\supset$) Si $(x,y) \in \overline{B}(0,1)$, entonces $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Por tanto, $y^2 \leqslant 1$, por lo que $|y| \leqslant 1$. Por tanto, $(x,y) \in A$.

4. Probar que A es conexo en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ si y solo si existe $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Determinar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

   Calculemos en primer lugar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$. Sabemos que $\mathcal{B} = \{S_R \mid R \geqslant 0\}$ es una partición mediante abiertos de $\mathbb{R}^2$. Veamos ahora que $(S_R, \mathcal{T}_{S_R})$ es conexo para todo $R \geqslant 0$. Calculamos en primer lugar $\mathcal{T}_{S_R}$, sabiendo que $\mathcal{T} = \{\overline{B}(0,r) \mid r > 0\}$:

   $$U \in \mathcal{T}_{S_R} \iff \exists r' \in \mathbb{R}^+ \mid U = \overline{B}(0,r') \cap S_R = \overline{B}(0,r') \cap S(0,r)$$

   Si $r' \geqslant r$, tenemos que $\overline{B}(0,r') \cap S(0,r) = S(0,r)$; mientras que si $r' < r$, entonces $\overline{B}(0,r') \cap S(0,r) = \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{T}_{S_R} = \{\emptyset, S(0,r)\}$, que es la topología trivial. Por tanto, $(S_R, \mathcal{T}_{S_R})$ es conexo, por lo que $\mathcal{B}$ es una partición mediante abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ son $\mathcal{B}$.

   Caracterizamos ahora los conexos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ mediante doble implicación:

   $\Longrightarrow$) Sea A conexo, y sea $x \in A$. Entonces, como $x \in A$ y A conexo, $A \subset C(x)$. Por tanto, $A \subset S_R$ para algún $R \geqslant 0$.

   $\Longleftarrow$) Sea $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Veamos que A es conexo. Como $A \subset S_R$, entonces $\mathcal{T}_{\big|A} = \mathcal{T}_{S_R}{}_{\big|A}$. Por tanto, ver que $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo equivale a ver que $\left(A, \mathcal{T}_{S_R}{}_{\big|A}\right)$ es conexo. Como $\mathcal{T}_{S_R} = \{\emptyset, S(0,r)\}$, tenemos que es la topología trivial. Por tanto, como todo subconjunto de un espacio topológico trivial es conexo, tenemos que $\left(A, \mathcal{T}_{S_R}{}_{\big|A}\right)$ es conexo, por lo que A es conexo.

5. Demostrar que A es compacto en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ si y solo si existe $J \subset [0, +\infty[$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{R \in J} S_R$.

   $\Longrightarrow$) Sea A compacto. Entonces, como $\mathcal{B}$ es un recubrimiento de A por abiertos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, tenemos que $\exists J \subset \mathbb{R}^+$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{R \in J} S_R$.

   $\Longleftarrow$) Sea $J \subset \mathbb{R}^+$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{R \in J} S_R$. Sabemos que $(S_R, \mathcal{T}_{S_R})$ es la topología trivial. Por tanto, como todo subconjunto de un espacio topológico trivial es compacto, tenemos que $A \cap S_R$ es compacto. Veamos por tanto que A es unión finita de compactos:

   $$A = A \cap \left(\bigcup_{R \in J} S_R\right) = \bigcup_{R \in J} (A \cap S_R)$$

como J es finito, tenemos que A es unión finita de compactos, por lo que A es compacto.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Enunciar y demostrar el teorema de Tichonov. Si se hace uso del lema del tubo, entonces éste debe ser enunciado y demostrado previamente.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

1. Decidir si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ son homeomorfos entre sí dos a dos o no:

   a) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 4\}$,
   b) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|x\| \leqslant 4\}$,
   c) $A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

   Veamos en primer lugar que A_2 es compacto.

   $$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|x\|\} \ \cap \ \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geqslant 1\}$$

   Como $\|\cdot\|$ es continua con la topología usual, tenemos que A_2 es intersección de dos cerrados, luego es cerrado. Además, claramente $A_2 \subset B(0, 5)$, luego A_2 es acotado. Por tanto, es compacto.

   Veamos ahora que A_1 no es compacto. Para ello, veremos que no es cerrado. Tenemos que:
   $$\mathbb{R}^2 \setminus A_1 = \overline{B}(0, 1) \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geqslant 4\}$$

   Veamos que dicho conjunto no es abierto. Tomado $p = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_1$, tenemos que no existe $U \in \mathcal{T}_u$, tal que $(0, 1) \in U \cap \overline{B}(0, 1)$. De forma directa se ve que $\nexists U \in \mathcal{T}$ tal que $(0, 1) \in U \subset \mathbb{R}^2 \setminus A_1$. Por tanto, $\mathbb{R}^2 \setminus A_1$ no es entorno de $(0, 1)$, por lo que $\mathbb{R}^2 \setminus A_1$ no es abierto, y por tanto A_1 no es cerrado. Por tanto, tampoco es compacto.

   Además, como A_3 no está acotado, tenemos que no es compacto.

   Por tanto, tenemos que A_2 no es homeomorfo ni a A_1 ni a A_3. Veamos ahora que $A_1 \cong A_3$. Sabemos que $]1, 4[\cong]0, \infty[$, por lo que sea f el homeomorfismo entre ellos, y notamos $g = f^{-1}$. Definimos $\overline{f} : A_1 \to A_3$ dado por:

   $$\overline{f}(x) = \frac{x}{\|x\|} f\left(\|x\|\right)$$

   Sea $\overline{g} : A_3 \to A_1$ dado por:

   $$\overline{g}(x) = \frac{x}{\|x\|} g\left(\|x\|\right)$$

   Tenemos que ambas son continuas, ya que es el producto, cociente y composicicón de funciones continuas. Veamos que:

   $$\overline{f}(\overline{g}(x)) = \frac{\overline{g}(x)}{\|\overline{g}(x)\|} \cdot f\left(\|\overline{g}(x)\|\right) = \frac{\frac{x}{\|x\|} g\left(\|x\|\right)}{\left\|\frac{x}{\|x\|} g\left(\|x\|\right)\right\|} \cdot f\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} g\left(\|x\|\right)\right\|\right) =$$
   $$= \frac{\frac{x}{\|x\|} g\left(\|x\|\right)}{\frac{\|x\|}{\|x\|} \left\|g\left(\|x\|\right)\right\|} \cdot f\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| g\left(\|x\|\right)\right) = \frac{x}{\|x\|} f(g(\|x\|)) \overset{(*)}{=} \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\| = x$$

De igual forma, se demuestra que $\overline{g}(\overline{f}(x)) = x \ \forall x \in A_1$. De esta forma, se ve que $\overline{f}$, $\overline{g}$ son biyectivas, con $\overline{g} = \overline{f}^{-1}$. Por tanto, $\overline{f}$ es un homeomorfismo, por lo que $A_1 \cong A_3$.

2. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{R}_i$ una relación de equivalencia en X_i tal que la proyección $p_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_i/\mathcal{R}_i, \mathcal{T}/\mathcal{R}_i)$ es abierta. Demostrar que

$$(X_1 \times X_2)/\mathcal{R} \cong (X_1/\mathcal{R}_1, \mathcal{T}_1/\mathcal{R}_1) \times (X_2/\mathcal{R}_2, \mathcal{T}_2/\mathcal{R}_2),$$

donde $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia en $X_1 \times X_2$ definida por

$$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \iff x_1\mathcal{R}_1 y_1 \text{ y } x_2\mathcal{R}_2 y_2.$$

Sea $f = p_1 \times p_2 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \to (X_1/\mathcal{R}_1, \mathcal{T}_1/\mathcal{R}_1) \times (X_2/\mathcal{R}_2, \mathcal{T}_2/\mathcal{R}_2)$ aplicación producto dada por $f(x, y) = (p_1(x), p_2(y))$. Como p_1, p_2 son abiertas, continuas y sobreyectivas, tenemos que f es continua, abierta y sobreyectiva, por lo que f es una identificación. Veamos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$:

$$\begin{aligned}(x, y)\mathcal{R}_f(x', y') &\iff f(x, y) = f(x', y') \iff (p_1(x), p_2(y)) = (p_1(x'), p_2(y')) \iff \\ &\iff p_1(x) = p_1(x') \text{ y } p_2(y) = p_2(y') \iff x\mathcal{R}_1 x' \text{ y } y\mathcal{R}_2 y' \iff \\ &\iff (x, y)\mathcal{R}(x', y')\end{aligned}$$

Por tanto, como f es una identificación y $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$, tenemos que f induce un homeomorfismo entre $(X_1 \times X_2)/\mathcal{R}$ y $(X_1/\mathcal{R}_1, \mathcal{T}_1/\mathcal{R}_1) \times (X_2/\mathcal{R}_2, \mathcal{T}_2/\mathcal{R}_2)$.

3. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos tal que $f(A)$ es conexo en $(Y, \mathcal{T}')$ para cada A conexo en $(X, \mathcal{T})$. ¿Es f continua?

Sea $X = \{1, 2\}$, y consideramos las topologías de Sierpinsky, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{2\}\}$. Sea ahora $Id_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$. Claramente $\{1\}, \{2\}$ son conexos en ambas topologías porque no hay dos abiertos no triviales, por lo que $f(A)$ es conexo en $(X, \mathcal{T}_2)$ para cada A conexo en $(X, \mathcal{T}_1)$. Sin embargo, f no es continua, ya que $f^{-1}(\{2\}) = \{2\} \notin \mathcal{T}_1$.